УДК 519.6

С. В. Пацко

ФЕЙЕРОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ВЫПУКЛЫХ НЕРАВЕНСТВ*

Введение

Статья посвящена аппарату фейеровских отображений, применяемому к построению итерационных процедур решения бесконечных (в том числе континуальных) систем выпуклых неравенств над пространством $\mathbb{R}^n$.

Первоначальными источниками фейеровских методов послужили работы Моцкина [1] и Агмона [2]. В 60-х годах Ереминым [3, гл. II–III] построена общая теория фейеровских отображений, установлены основные их свойства и свойства итерационных последовательностей, порождаемых такими отображениями. Были даны базовые конструкции фейеровских отображений по отношению к конечным системам выпуклых (в частности, линейных) неравенств, а также к задачам линейного и выпуклого программирования [3]. Базовые конструкции реализованы в формах последовательной релаксации (метод ПР), взвешенной релаксации (метод ВР), экстремальной релаксации (метод ЭР).

Применительно к конечной системе линейных неравенств

$$l_j(\mathbf{x}) := (a_j, \mathbf{x}) - b_j \le 0, \quad j = 1, \dots, m, \tag{1}$$

с множеством решений $M \ne \emptyset$ указанные реализации выглядят следующим образом. Пусть

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \lambda_j \frac{l_j^+(\mathbf{x})}{\|a_j\|^2} a_j, \quad \lambda_j \in (0,2), \quad l_j^+(\mathbf{x}) = \max\{0, l_j(\mathbf{x})\};$$
$$d(\mathbf{x}) = \max_{(j)} l_j^+(\mathbf{x}) \ (= l_{j_\mathbf{x}}^+(\mathbf{x})).$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №00-15-96041, 01-01-00563).

Выпишем отображения

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{x}) = \varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_m(\mathbf{x}); \tag{2}$$

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\varphi_j(\mathbf{x}), \quad \alpha_j > 0, \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1; \tag{3}$$

$$\varphi^{(3)}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \lambda\frac{d(\mathbf{x})}{\|a_{j_\mathbf{x}}\|^2}a_{j_\mathbf{x}}, \quad \lambda \in (0,2). \tag{4}$$

Каждое из этих отображений является M-фейеровским и реализует соответствующую базовую конструкцию. Последовательности, индуктивно порождаемые ими, сходятся к тому или иному решению выписанной системы (1) (при произвольном начальном $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$).

Частные реализации фейеровских методов, основанные на конструкциях фейеровских отображений (2) и (3), применительно к счетным системам выпуклых неравенств были рассмотрены в работах [3, теорема 3.2.7; 4].

В данной работе строятся и обосновываются фейеровские методы для бесконечных систем выпуклых неравенств счетной и континуальной мощности, при этом за основу берется конструкция экстремальной релаксации типа (4).

1. Фейеровские отображения: основные понятия и свойства

Ниже приводятся основные определения и свойства, касающиеся фейеровских отображений и порождаемых ими фейеровских последовательностей [3]. При этом затрагиваются только те свойства, которые необходимы для обоснования сходимости рассматриваемых здесь фейеровских процессов.

Определение 1. *Отображение $\varphi \in \{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$ называется M-фейеровским, если*

$$\varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{y}, \quad \|\varphi(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\| < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall\ \mathbf{y} \in M, \quad \forall\ \mathbf{x} \notin M.$$

Как видно из определения, основной особенностью фейеровского отображения является то, что такое отображение переводит точку, не лежащую в множестве M, в другую точку таким образом, что расстояние от нее до каждой точки множества M уменьшается.

Определение 2. *Многозначное отображение $\varphi \in \{\mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}\}$ называется M-фейеровским, если*

$$\varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{y}, \quad \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall\ \mathbf{y} \in M, \quad \forall\ \mathbf{x} \notin M, \quad \forall \mathbf{z} \in \varphi(\mathbf{x}).$$

Согласно определению точки множества M и только они являются неподвижными точками отображения φ.

Класс M-фейеровских отображений (как однозначных, так и многозначных) обозначим через $\mathbf{F}_M$.

Свойство 1.1. *Если* $\mathbf{F}_M \neq \emptyset$, *то* M *автоматически является выпуклым и замкнутым* (см., например, [5, свойство 39.4]).

Определение 3. *Последовательность* $\{\mathbf{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{x}_k\} \cap M = \emptyset$ *называется* M*-фейеровской, если для любого* $\mathbf{y} \in M$ *и для всех* k

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{y}\| < \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}\|.$$

Приведем несколько простых фактов, которые используются в дальнейшем. Доказательство этих утверждений можно найти в работе [3, гл. II].

Лемма 1.1. *Пусть* $\varphi \in \mathbf{F}_M$ *и последовательность* $\{\mathbf{x}_k\}$ *рекуррентно порождена соотношением* $\mathbf{x}_{k+1} \in \varphi(\mathbf{x}_k)$ *при произвольном начальном* $\mathbf{x}_0$. *Если* $\{\mathbf{x}_k\} \cap M = \emptyset$, *то последовательность* $\{\mathbf{x}_k\}$ M*-фейеровская.*

Лемма 1.2. *Если* $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$ *— две различные предельные точки* M*-фейеровской последовательности* $\{\mathbf{x}_k\}$, *то все точки* $y \in M$ *лежат в гиперплоскости, являющейся геометрическим местом точек, равноудаленных от* $\mathbf{x}'$ *и* $\mathbf{x}''$.

Доказательство. Для каждого $y \in M$ имеем $\inf_{(k)} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}' - \mathbf{y}\| = = \|\mathbf{x}'' - \mathbf{y}\|$, т. е. $(\mathbf{x}' - \mathbf{y},\ \mathbf{x}' - \mathbf{y}) = (\mathbf{x}'' - \mathbf{y},\ \mathbf{x}'' - \mathbf{y})$. Преобразование этого равенства дает $(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}', \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}''\|^2 - \|\mathbf{x}'\|^2$, т. е. все точки $\mathbf{y} \in M$ принадлежат гиперплоскости $(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}', \mathbf{x}) = \gamma := \|\mathbf{x}''\|^2 - \|\mathbf{x}'\|^2$, полученной как геометрическое место точек, равноудаленных от $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$.

Следствие. *Если* $\varphi \in \mathbf{F}_M$ *и* M *— телесное множество, то последовательность* $\{\varphi^k(\mathbf{x}_0)\}_k$ *сходится при произвольном начальном* $\mathbf{x}_0$.

Лемма 1.3. *Если* $\{\mathbf{x}_k\}$ *—* M*-фейеровская последовательность и* M *содержит ее предельную точку* $\mathbf{x}'$, *то* $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}'$.

Доказательство. Предполагая противное, т. е. существование предельной точки $\mathbf{x}'' \neq \mathbf{x}'$, с помощью леммы 1.2 приходим к выводу, что все точки $\mathbf{y} \in M$ равноудалены от $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$. Поэтому, взяв $\mathbf{y} := \mathbf{x}'$, получим противоречие.

Лемма 1.4. *Отображение* $\mathbf{Pr}_M(\mathbf{x})$, *осуществляющее проектирование точки* $\mathbf{x}$ *на выпуклое замкнутое множество* $M \subset \mathbb{R}^n$, *является непрерывным* M*-фейеровским* (доказательство см. [5, лемма 40.2]).

Определение 4. *Отображение* $\varphi \in \{\mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}\}$ *называется замкнутым, если из того, что* $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}'$, $\{\mathbf{y}_k\} \to \mathbf{y}'$ *и* $\mathbf{y}_k \in \varphi(\mathbf{x}_k)$ *для всех* k, *следует, что* $\mathbf{y}' \in \varphi(\mathbf{x}')$.

Класс замкнутых M-фейеровских отображений обозначим $\overline{\mathbf{F}}_M$.

П р и м е р замкнутого отображения [3, гл. II]. Пусть $d(\mathbf{x})$ — выпуклая функция и $\{\mathbf{x}|d(\mathbf{x}) \le 0\} = M \neq \emptyset$. Важным представителем класса $\overline{\mathbf{F}}_M$ является отображение φ :

$$\mathbf{x} \xrightarrow{\varphi} \left\{\mathbf{x} - \lambda \frac{d^+(\mathbf{x})}{\| h \|^2} h \,|\, h \in \partial d(\mathbf{x})\right\}, \tag{1.1}$$

где $\lambda \in (0, 2)$, а символ $\partial d(\mathbf{x})$ означает субдифференциал функции $d(\mathbf{x})$. Если $h = 0$, то $\mathbf{x}$ — точка минимума функции $d(\mathbf{x})$, поэтому $d^+(\mathbf{x}) = 0$. В этой ситуации, т. е. в ситуации $h = 0$ в (1.1), полагают $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Заметим, что если $d(\mathbf{x})$ — дифференцируемая функция, то соотношение (1.1) можно переписать в виде

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \lambda \frac{d^+(\mathbf{x})}{\|\nabla d(\mathbf{x})\|^2} \nabla d(\mathbf{x}). \tag{1.2}$$

В случае линейности $d(\mathbf{x})$, т. е. при $d(\mathbf{x}) = (a, \mathbf{x}) - \alpha,\ a \neq 0$, будем иметь

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \lambda \frac{[(a, \mathbf{x}) - \alpha]^+}{\|a\|^2} a. \tag{1.3}$$

Если M — множество решений совместной системы (1) (из введения), то конструкция (4) является частным случаем конструкции (1.1).

Лемма 1.5. *Если отображение* $\varphi \in \mathbf{F}_M$ *замкнуто, то последовательность* $\{\mathbf{x}_k\}$, *порожденная рекуррентно включением* $\mathbf{x}_{k+1} \in \varphi(\mathbf{x}_k)$ *при произвольном* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, *сходится к* $\mathbf{x}' \in M$.

Доказательство. Если $\{\mathbf{x}_k\} \cap M \neq \emptyset$, то заключение леммы следует из определения M-фейеровского отображения.

В случае $\{\mathbf{x}_k\} \cap M = \emptyset$ покажем, что M-фейеровская последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ сходится к элементу $\mathbf{x}' \in M$. Так как последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ ограничена, выделим подпоследовательность $\{\mathbf{x}_{k_j}\} \to \mathbf{x}'$ так, что $\{\mathbf{x}_{k_j+1}\} \to \mathbf{x}''$. Точки $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$, очевидно, являются предельными точками последовательности $\mathbf{x}_k$, поэтому, если $\mathbf{x}' \in M$, то, согласно лемме 1.3, $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}'$.

Если же $\mathbf{x}' \notin M$, то, в силу замкнутости φ, имеем $\mathbf{x}'' \in \varphi(\mathbf{x}')$, т. е. $|\mathbf{x}'' - \mathbf{y}| < |\mathbf{x}' - \mathbf{y}|$ для всех $\mathbf{y} \in M$, что противоречит равноудаленности точек множества M до $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$ (лемма 1.2). Лемма доказана.

Лемма 1.6. *Если отображение $\varphi \in \mathbf{F}_M$, S — ограниченное множество, то $\bigcup_{\mathbf{x}\in S} \varphi(\mathbf{x})$ — ограниченное множество.*

Эта лемма проверяется непосредственно. Заметим, что если $T \subset \mathbb{R}^n$ и $\varphi \in \{\mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}\}$, то под $\varphi(T)$ понимают множество $\bigcup_{\mathbf{x}\in T} \varphi(\mathbf{x})$.

Теорема 1.1. *Если $\varphi_j(\mathbf{x}) \in \overline{\mathbf{F}}_{M_j}$, $j = 1,\ldots,m$, и $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$, $\alpha_j > 0$, то*

1) $\sum_{j=1}^m \alpha_j\varphi_j(\mathbf{x}) \in \overline{\mathbf{F}}_{\bigcap_{j=1}^m M_j}$;

2) $\varphi_1(\ldots(\varphi_m(\mathbf{x})\ldots) \in \overline{\mathbf{F}}_{\bigcap_{j=1}^m M_j}$.

Доказательство. Доказательство фейеровости построенных отображений элементарно. Установим их замкнутость.

1) Обозначим $\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \alpha_j\varphi_j(\mathbf{x})$. Пусть $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}'$, $\{\mathbf{y}_k\} \to \mathbf{y}'$ и $\mathbf{y}_k \in \varphi(\mathbf{x}_k)$, т. е. $\mathbf{y}_k = \sum_{j=1}^m \alpha_j\mathbf{y}_k^j$, где $\mathbf{y}_k^j \in \varphi_j(\mathbf{x}_k)$. Учитывая ограниченность последовательностей $\{\mathbf{y}_k^j\}$, выделим подпоследовательность $\mathbf{y}_{k_l}^j$ так, что $\mathbf{y}_{k_l}^j \to \overline{\mathbf{y}}^j$ и $\mathbf{y}_{k_l}^j \in \varphi_j(\mathbf{x}_{k_l})$ для всех j. Имеем $\mathbf{y}_{k_l} = \sum_{j=1}^m \alpha_j\mathbf{y}_{k_l}^j$. Переходя к пределу при $l \to \infty$, получаем $\mathbf{y}' = \sum_{j=1}^m \alpha_j\overline{\mathbf{y}}^j$, что с учетом замкнутости $\varphi_j(\mathbf{x})$ означает $\sum_{j=1}^m \alpha_j\overline{\mathbf{y}}^j \in \sum_{j=1}^m \alpha_j\varphi_j(\mathbf{x}')$, т. е. $\mathbf{y}' \in \varphi(\mathbf{x}')$.

2) Достаточно проверить справедливость утверждения для $m = 2$. Пусть $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}'$, $\{\mathbf{y}_k\} \to \mathbf{y}'$, $\mathbf{y}_k \in \varphi_1\varphi_2(\mathbf{x}_k)$. Покажем, что $\mathbf{y}' \in \varphi_1\varphi_2(\mathbf{x}')$. Включение $\mathbf{y}_k \in \varphi_1\varphi_2(\mathbf{x}_k)$ можно представить в виде $\mathbf{y}_k \in \varphi_1(\mathbf{y}_k^1)$, $\mathbf{y}_k^1 \in \varphi_2(\mathbf{x}_k)$, при этом, в силу леммы 1.6, можно считать, что $\mathbf{y}_k^1 \to \mathbf{y}^1$ и $\mathbf{y}^1 \in \varphi_2(\mathbf{x}')$, а потому $\mathbf{y}' \in \varphi_1(\mathbf{y}^1) \in \varphi_1\varphi_2(\mathbf{x}')$.

Теорема 1.1 доказана.

Следствие 1.1. *Если $\varphi(\mathbf{x}) \in \overline{\mathbf{F}}_M$, а N — выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$ такое, что $M \cap N \neq \emptyset$, то $\mathbf{Pr}_N(\varphi(\mathbf{x})) = \cup_{\mathbf{y}\in\varphi(\mathbf{x})}\mathbf{Pr}_N(\mathbf{y}) \in \overline{\mathbf{F}}_{M\cap N}$.*

Это следует из леммы 1.4 и теоремы 1.1.

2. Фейеровские процессы для счетных систем выпуклых неравенств

Ниже излагается метод построения сходящегося фейеровского процесса для счетной системы выпуклых неравенств $f_j(\mathbf{x}) \le 0$, $j = 1, 2, \ldots, m, \ldots$; при этом в основу построения полагается конструкция типа (4) с той разницей, что на каждой итерации процесса вместо функции невязки $d(\mathbf{x}) = \sup\limits_{(j)} f_j(\mathbf{x})$ используется функция $d_k(\mathbf{x}) = \max\limits_{j\in\overline{1,k}} f_j(\mathbf{x})$.

Необходимый результат о сходимости описанного процесса к решению счетной системы будет получен как частный случай более общей ситуации. Опишем ее.

Пусть $d(\mathbf{x})$ — выпуклая функция, определенная на $\mathbb{R}^n$, и множество $M := \{\mathbf{x} \mid d(\mathbf{x}) \le 0\}$ непусто. Положим

$$\mu_h(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & d(\mathbf{x}) \le 0; \\ \frac{d(\mathbf{x})}{\|h\|^2}h, & d(\mathbf{x}) > 0, \end{cases}$$

здесь $h \in \partial d(\mathbf{x})$. Во второй альтернативе автоматически $h \ne 0$. Действительно, если $h \in \partial d(\overline{\mathbf{x}})$, $d(\overline{\mathbf{x}}) > 0$, то тождественное по $\mathbf{x}$ неравенство $(h, \mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}) \le \le d(\mathbf{x}) - d(\overline{\mathbf{x}})$ при $h = 0$ и $\mathbf{x} = \widetilde{\mathbf{x}} \in M$ дает $0 < d(\overline{\mathbf{x}}) \le d(\widetilde{\mathbf{x}}) \le 0$, что противоречиво.

Величину $\mu_h(\mathbf{x})$ можно также записать в форме

$$\mu_h(\mathbf{x}) = \frac{d^+(\mathbf{x})}{\|h\|^2}h,$$

полагая ее равной нулю при $d^+(\mathbf{x}) = 0$, т. е. при $d(\mathbf{x}) \le 0$.

Введем обозначения:

$$\mu(\mathbf{x}) = \{\mu_h(\mathbf{x}) \mid h \in \partial d(\mathbf{x})\}, \tag{2.1}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \lambda\mu(\mathbf{x}), \tag{2.2}$$

где $\lambda \in (0, 2)$. Отображение $\varphi(\mathbf{x})$ является, вообще говоря, многозначным. При фиксированном h будем допускать запись

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \lambda\frac{d^+(\mathbf{x})}{\|h\|^2}h, \tag{2.3}$$

в которой $\lambda \in (0, 2)$, $h \in \partial d(\mathbf{x})$.

Лемма 2.1. *Для* $\varphi(\mathbf{x})$ *из* (2.2) *выполняется неравенство*

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{x} \notin M, \quad \forall \mathbf{z} \in \varphi(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{y} \in M, \tag{2.4}$$

т. е. $\varphi \in \mathbf{F}_M$.

Это утверждение соответствует приведенному выше примеру (1.1).

С $\varphi(\mathbf{x})$ свяжем M-фейеровскую последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$, порождаемую рекуррентно соотношением

$$\mathbf{x}_{k+1} \in \varphi(\mathbf{x}_k), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{2.5}$$

т. е. мы исходим из предположения $\{\mathbf{x}_k\} \cap M = \emptyset$. Если при некотором $\overline{k}$ имеем $\mathbf{x}_{\overline{k}} \in M$, то процесс стабилизируется на элементе $\mathbf{x}_{\overline{k}}$ из M и этим вопрос сходимости исчерпывается.

Для целей рассмотрения фейеровских процессов для бесконечных систем выпуклых неравенств введем понятие нестационарного фейеровского отображения. Пусть $\{d_k(\mathbf{x})\}$ — последовательность выпуклых функций, поточечно сходящаяся к $d(\mathbf{x})$, причем

$$d_k(\mathbf{x}) \leq d_{k+1}(\mathbf{x}) \quad \text{для всех } k. \tag{2.6}$$

Рассмотрим отображение

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \lambda_k \mu_k(\mathbf{x}), \tag{2.7}$$

где

$$\lambda_k \in [\delta, 2-\delta] \subset (0,2), \quad \delta > 0;$$

$$\mu_k(\mathbf{x}) = \frac{d_k^+(\mathbf{x})}{\|h\|^2} h, \quad h \in \partial d_k(\mathbf{x}).$$

Теорема 2.1. *При сделанных предположениях относительно функций* $\{d(\mathbf{x}), d_k(\mathbf{x})\}_k$ *процесс*

$$\mathbf{x}_{k+1} \in \varphi_k(\mathbf{x}_k), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{2.8}$$

сходится к точке $\mathbf{x}' \in M$ $(= \{\mathbf{x} \mid d(\mathbf{x}) \leq 0\} \neq \emptyset)$ *при произвольном начальном* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

П р и м е р, реализующий ситуацию нестационарного процесса (2.8). Пусть

$$f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{2.9}$$

есть счетная система выпуклых неравенств, определяющая множество решений $M \neq \emptyset$. Положим $d_k(\mathbf{x}) = \max\limits_{j \in \overline{1,k}} f_j(\mathbf{x})$ и предположим, что

$$d(\mathbf{x}) := \sup_{(j)} f_j(\mathbf{x}) < +\infty \quad \text{для всех } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{2.10}$$

Введенные функции $\{d(\mathbf{x}), d_k(\mathbf{x})\}_k$ удовлетворяют всем условиям теоремы 2.1.

Доказательству теоремы 2.1 предпошлем ряд лемм.

Лемма 2.2. *Пусть* $\{d_k(\mathbf{x})\}_k$ *— последовательность выпуклых функций, поточечно сходящаяся к выпуклой функции* $d(\mathbf{x})$, *причем выполняется условие монотонности* (2.6). *Тогда из* $\{\mathbf{x}_k\} \to \overline{\mathbf{x}}$ *следует* $d_k(\mathbf{x}_k) \to d(\overline{\mathbf{x}})$.

Доказательство. В силу непрерывности $d(\mathbf{x})$, по $\varepsilon > 0$ можно указать $\overline{k}$ такое, что

$$|d(\mathbf{x}_k) - d(\overline{\mathbf{x}})| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при всех } k \geq \overline{k}. \tag{2.11}$$

Далее, поскольку $d_s(\overline{\mathbf{x}}) \xrightarrow{(s)} d(\overline{\mathbf{x}})$, то при достаточно больших s будет выполняться неравенство

$$|d_s(\overline{\mathbf{x}}) - d(\overline{\mathbf{x}})| < \frac{\varepsilon}{2},$$

что, в силу (2.6), означает

$$0 \leq d(\overline{\mathbf{x}}) - d_s(\overline{\mathbf{x}}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $s = \overline{k}$, тогда

$$0 \leq d(\overline{\mathbf{x}}) - d_{\overline{k}}(\overline{\mathbf{x}}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда, в силу (2.7) и непрерывности $d_{\overline{k}}(\mathbf{x})$, вытекает соотношение

$$0 \leq d(\mathbf{x}_k) - d_{\overline{k}}(\mathbf{x}_k) < \frac{\varepsilon}{2}$$

при достаточно больших k, пусть при $k \geq \overline{\overline{k}} \geq \overline{k}$. Но тогда разность $d(\mathbf{x}_k) - d_{\overline{k}}(\mathbf{x}_k)$ будет уменьшаться с ростом $s = \overline{k},\ \overline{k}+1, \dots$, что дает

$$0 \leq d(\mathbf{x}_k) - d_s(\mathbf{x}_k) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad s \geq \overline{k}, \quad k \geq \overline{\overline{k}}. \tag{2.12}$$

Запишем очевидное неравенство

$$|d_s(\mathbf{x}_k) - d(\overline{\mathbf{x}})| \leq |d(\mathbf{x}_k) - d(\overline{\mathbf{x}})| + [d(\mathbf{x}_k) - d_s(\mathbf{x}_k)].$$

Отсюда с учетом (2.11) и (2.12) получаем требуемое.

Лемма 2.3. *Пусть выполнены условия леммы* 2.2. *Если* $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}'$ *и* $h_k \in \partial d_k(\mathbf{x}_k)$, *то* $\sup\limits_{(k)} \|h_k\| < +\infty$.

Доказательство. По определению h_k имеем

$$(h_k, \mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \leq d_k(\mathbf{x}) - d_k(\mathbf{x}_k) \quad \text{для всех } \mathbf{x}.$$

Положив $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k + \frac{h_k}{\|h_k\|}$, будем иметь

$$\|h_k\| \leq d_k(\mathbf{x}_k + \frac{h_k}{\|h_k\|}) - d_k(\mathbf{x}_k).$$

Поскольку $d_k(\mathbf{x}_k + \frac{h_k}{\|h_k\|})$ и $d_k(\mathbf{x}_k)$ ограничены, то отсюда следует ограниченность $\{\|h_k\|\}$.

Переходим к доказательству теоремы 2.1.

Выделим в первую очередь ситуацию, когда $\exists \overline{k} \quad \forall k \geq \overline{k} : d_k^+(\mathbf{x}_k) = 0$ (т. е. $d_k(\mathbf{x}_k) \leq 0$). При этом, разумеется, $\mathbf{x}_{\overline{k}} = \mathbf{x}_{\overline{k}+1} = \ldots =: \mathbf{x}' \in M$. В остальных случаях последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ будет M-фейеровской, если в ней убрать возможные повторы. Последние могут возникнуть за счет того, что, например, $d_{k'}^+(\mathbf{x}_{k'}) = 0$, но при некотором $k'' > k'$ выполняется $d_{k''}(\mathbf{x}_{k''}) > 0$. В такой ситуации возникает повтор: $\mathbf{x}_{k'} = \mathbf{x}_{k'+1}$.

Далее рассмотрим две альтернативы —

$$\underline{\lim}\, d_k^+(\mathbf{x}_k) = 0 \quad \text{и} \quad \underline{\lim}\, d_k^+(\mathbf{x}_k) =: \gamma > 0. \tag{2.13}$$

1. Случай первой альтернативы. Выделим сходящуюся подпоследовательность $\{\mathbf{x}_{j_k}\} \to \mathbf{x}'$ такую, что $\{d_{j_k}(\mathbf{x}_{j_k})\} \to 0$. Тогда, в силу леммы 2.2, $\{d_{j_k}^+(\mathbf{x}_{j_k})\} \to d^+(\mathbf{x}') = 0$, т. е. $\mathbf{x}' \in M$.

2. Пусть $\underline{\lim}\, d_k^+(\mathbf{x}_k) = \gamma > 0$ (в этом случае «+» над $d_k(\mathbf{x}_k)$ можно опустить). Тогда $\exists \overline{\delta} > 0 \ \exists \overline{k} \ \forall k \geq \overline{k} : d_k(\mathbf{x}_k) > \overline{\delta} > 0$. Введем обозначения:

$$d_k^0(\mathbf{x}_k) := d_k(\mathbf{x}_k) - \delta_0, \quad \lambda_k^0 := \lambda_k \frac{d_k(\mathbf{x}_k)}{d_k(\mathbf{x}_k) - \delta_0}.$$

При достаточно малом $\delta_0 < \overline{\delta}$, $\delta_0 > 0$ будут выполняться соотношения

$$\lambda_k^0 \in [\delta_0, 2 - \delta_0] \subset (0, 2), \quad \forall k \geq \overline{k}.$$

Рекуррентное соотношение

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \lambda_k \frac{d_k^+(\mathbf{x}_k)}{\|h_k\|^2} h_k, \tag{2.14}$$

соответствующее процессу (2.8), можно теперь переписать в виде

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \lambda_k^0 \frac{d_k^0(\mathbf{x}_k)}{\|h_k\|^2} h_k, \tag{2.15}$$

при этом прежний субградиент $h_k \in \partial d_k(\mathbf{x}_k)$ будет субградиентом и для $d_k^0(\mathbf{x}_k) = d_k(\mathbf{x}_k) - \delta_0$. Но процесс (2.15) будет фейеровским уже для системы

$$d_k(\mathbf{x}) - \delta_0 \leq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.16}$$

задающей *телесное* множество решений. Тогда по следствию из леммы 1.2 последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ сходится к некоторому элементу $\mathbf{x}'$. Докажем, что $\mathbf{x}' \in M$. Обратимся к соотношению (2.14). Из него вытекает, что

$$d_k(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{\lambda_k} \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| \cdot \|h_k\|. \tag{2.17}$$

Поскольку, в силу леммы 2.3, $\{\|h_k\|\}_k$ ограничены, то путем предельного перехода в (2.17) получаем $d(\mathbf{x}') = 0$, т. е. $\mathbf{x}' \in M$. Теорема полностью доказана.

Теорема 2.2. *Пусть система выпуклых неравенств* (2.9) *совместна, причем выполнено условие* (2.10). *Положим* $d_k(\mathbf{x}) = \max\limits_{j\in\overline{1,k}} f_j(\mathbf{x})$ *и* $\varphi_k(\mathbf{x})$ *согласно* (2.7). *Тогда процесс* (2.8) *сходится к некоторому решению системы* (2.9).

Этот результат является примером применения теоремы 2.1 и вытекает из последней.

Примечание. Условия, обеспечивающие сходимость итерационного процесса (2.8) применительно к совместной счетной системе выпуклых неравенств, сводятся, по существу, к *одному* условию, а именно

$$\sup_{(j)} f_j(\mathbf{x}) < +\infty, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Его можно преодолеть, например, для случая линейной системы

$$l_j(\mathbf{x}) := (a_j, \mathbf{x}) - b_j \le 0, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Если каждое неравенство этой системы умножить на такое $\varepsilon_j > 0$, что $\varepsilon_j|a_j| < \delta$, $\varepsilon_j|b_j| < \delta$, $\delta > 0$, то система

$$\bar{l}_j(\mathbf{x}) := \varepsilon_j l_j(\mathbf{x}) \le 0, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

будет удовлетворять условию $\sup\limits_{(j)} \bar{l}_j(\mathbf{x}) < +\infty$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Действительно,

$$\sup_{(j)} \varepsilon_j[(a_j, \mathbf{x}) - b_j] \le \sup_{(j)} \varepsilon_j[|a_j|\ |\mathbf{x}| + b_j] \le \delta(|\mathbf{x}| + 1).$$

3. Фейеровский процесс для континуальной системы выпуклых неравенств (основной тип W)

Рассмотрим систему выпуклых неравенств

$$f_\alpha(\mathbf{x}) \le 0, \ \forall \alpha \in N \tag{3.1}$$

с множеством решений $M \ne \emptyset$. На левые части системы (3.1) будем накладывать следующие ограничения:

1) N — компакт из $\mathbb{R}^k$;

2) функция $\overline{f}(\mathbf{z}) := f_\alpha(\mathbf{x})$ выпукла по $\mathbf{x}$ для всех $\alpha \in N$ и непрерывна по $\mathbf{z} = [\mathbf{x}, \alpha] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$;

3) отображение $[\mathbf{x}, \alpha] \to \partial_{\mathbf{x}} f_\alpha(\mathbf{x})$ замкнуто по $\mathbf{z} = [\mathbf{x}, \alpha]$, т. е. из $\{[\mathbf{x}_k, \alpha_k]\}_k \to [\mathbf{x}', \alpha']$ и $\{h_k\}_k \to h'$, $h_k \in \partial_{\mathbf{x}} f_{\alpha_k}(\mathbf{x}_k)$ следует $h' \in \partial_{\mathbf{x}} f_{\alpha'}(\mathbf{x}')$;

4) $\forall \alpha \in N\ \exists p_\alpha : f_\alpha(p_\alpha) < 0$.

Введем для системы (3.1) функцию невязки

$$d(\mathbf{x}) = \max_{\alpha \in N} f_\alpha^+(\mathbf{x})\ (= f_{\alpha_{\mathbf{x}}}^+(\mathbf{x})).$$

Эта функция является непрерывной.

Сделаем важное замечание. Операция взятия максимума по $\alpha \in N$ функций $f_\alpha^+(\mathbf{x})$ лишь идентифицирует тот индекс $\alpha_{\mathbf{x}}$, на котором этот максимум достигается. О сложности или простоте проведения такой операции можно говорить только в конкретных ситуациях. Обсуждать же, например, ее сложность в общем случае не имеет никакого содержательного смысла.

Положим $J(\mathbf{x}) = \{\alpha_{\mathbf{x}} | d(\mathbf{x}) = f_{\alpha_{\mathbf{x}}}^+(\mathbf{x})\}$. Построим отображение $\varphi(\mathbf{x})$:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x}, \text{ если } d(\mathbf{x}) = 0\ (\mathbf{x} \in M); \\ \{\mathbf{x} - \lambda \frac{d(\mathbf{x})}{\|h\|^2} h | h \in \partial_{\mathbf{x}} f_{\alpha_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}),\ \alpha_{\mathbf{x}} \in J(\mathbf{x})\}, \text{ если } d(\mathbf{x}) > 0; \end{cases} \tag{3.2}$$

здесь $\lambda \in (0, 2)$. Заметим, что для любого $\overline{\mathbf{x}}$ такого, что $d(\overline{\mathbf{x}}) > 0$, субградиент h из (3.2) будет отличным от нуля. Действительно, если бы $h = 0$, то из соотношения $0 = (h, \mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}) \le f_{\alpha_{\overline{\mathbf{x}}}}(\mathbf{x}) - f_{\alpha_{\overline{\mathbf{x}}}}(\overline{\mathbf{x}})$, выполняющегося для всех $\mathbf{x}$, в силу выпуклости функции $f_{\alpha_{\overline{\mathbf{x}}}}(\mathbf{x})$, вытекало $\overline{\mathbf{x}} \in \operatorname{Arg}\min\limits_{(\mathbf{x})} f_{\alpha_{\overline{\mathbf{x}}}}(\mathbf{x})$. Но это противоречиво, ибо, с одной стороны, $f_{\alpha_{\overline{\mathbf{x}}}}(\overline{\mathbf{x}}) = d(\overline{\mathbf{x}}) > 0$, а с другой – для $\mathbf{x} := \mathbf{x}' \in M : f_{\alpha_{\overline{\mathbf{x}}}}(\mathbf{x}') \le 0$.

Теорема 3.1. *При перечисленных условиях* 1–4 *отображение* (3.2) *является M-фейеровским замкнутым отображением.*

Доказательство. Фейеровость отображения (3.2) относительно множества M следует из факта, приведенного в примере после определения 1.4. Необходимо показать замкнутость этого отображения. Пусть $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}'$, $\{\mathbf{y}_k\} \to \mathbf{y}'$, $\mathbf{y}_k \in \varphi(\mathbf{x}_k)$. Нужно доказать $\mathbf{y}' \in \varphi(\mathbf{x}')$. Включение $\mathbf{y}_k \in \varphi(\mathbf{x}_k)$ означает, что

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k - \lambda \frac{d(\mathbf{x}_k)}{\|h_k\|^2} h_k, \tag{3.3}$$

где h_k выбрано согласно (3.2), т. е. $h_k \in \partial_{\mathbf{x}} f_{\alpha_k}(\mathbf{x}_k)$; α_k — сокращение для $\alpha_{\mathbf{x}}$ при $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$. При компактности N можно считать $\{\alpha_k\} \to \alpha' \in N$ (иначе от последовательностей $\{\mathbf{x}_k\}$, $\{\mathbf{y}_k\}$ можно было бы перейти к подпоследовательностям с обеспечением необходимой сходимости для соответствующей последовательности $\{\alpha_k\}$).

Возможны два случая:

1. $d(\mathbf{x}') > 0$**.** Докажем сначала ограниченность последовательности $\{h_k\}$. Поскольку неравенство $(h_k, \mathbf{x}-\mathbf{x}_k) \le f_{\alpha_k}(\mathbf{x}) - f_{\alpha_k}(\mathbf{x}_k)$ выполняется для любых $\mathbf{x}$, то, положив $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k + \frac{h_k}{\|h_k\|}$, получим (по аналогии с доказательством леммы 2.3) $\|h_k\| \le f_{\alpha_k}(\mathbf{x}_k + \frac{h_k}{\|h_k\|}) - f_{\alpha_k}(\mathbf{x}_k)$, что, в силу условия 2, дает требуемую ограниченность последовательности $\{h_k\}$. Это позволяет (по схеме перехода к подпоследовательностям) считать, что $\{h_k\} \to h'$, при этом $h' \in \partial_{\mathbf{x}} f_{\alpha'}(\mathbf{x}')$, согласно условию 3 доказываемой теоремы. Кроме того, $h' \ne 0$. Действительно, если $h' = 0$, то из неравенства $(h', \mathbf{x} - \mathbf{x}') \le$ $\le f_{\alpha'}(\mathbf{x}) - f_{\alpha'}(\mathbf{x}')$, выполняющегося для всех $\mathbf{x}$, вытекает $f_{\alpha'}(\mathbf{x}') \le f_{\alpha'}(\mathbf{x})$. Но поскольку $d(\mathbf{x}') = f_{\alpha'}(\mathbf{x}') > 0$ и по условию 4 $\exists p_{\alpha'} : f_{\alpha'}(p_{\alpha'}) < 0$, то при $\mathbf{x} = p_{\alpha'}$ имеем противоречие. Итак, $h' \ne 0$. Переход к пределу в (3.3) дает соотношение

$$\mathbf{y}' = \mathbf{x}' - \lambda \frac{d(\mathbf{x}')}{\|h'\|^2} h', \tag{3.4}$$

которое, в силу определения отображения $\varphi(\mathbf{x})$, показывает, что $\mathbf{y}' \in \varphi(\mathbf{x}')$.

2. $d(\mathbf{x}') = 0$**.** Рассмотрим два подслучая.

2.1. $\exists\{\mathbf{x}_{k_j}\} \subset \{\mathbf{x}_k\} : d(\mathbf{x}_{k_j}) = 0$**.** Это соответствует тому, что последовательность $\{\mathbf{x}_{k_j}\}$ целиком лежит в множестве M. Учитывая, что в этом случае $\varphi(\mathbf{x}_{k_j}) = \mathbf{x}_{k_j}$, получаем $\mathbf{y}_{k_j} = \varphi(\mathbf{x}_{k_j}) = \mathbf{x}_{k_j} \to \mathbf{x}'$, откуда $\mathbf{y}' = \varphi(\mathbf{x}') = \mathbf{x}'$, т. е. $\mathbf{y}' \in \varphi(\mathbf{x}')$.

2.2. $\exists \overline{k} : d(\mathbf{x}_k) > 0,\ \forall\, k > \overline{k}$. Как и выше, показывается, что $h' \in \partial_{\mathbf{x}} f_{\alpha'}(\mathbf{x}')$ влечет $h' \ne 0$. Действительно, поскольку $(h', \mathbf{x} - \mathbf{x}') \le f_{\alpha'}(\mathbf{x}) - f_{\alpha'}(\mathbf{x}')$ для всех $\mathbf{x}$, то при $h' = 0$ получаем $f_{\alpha'}(\mathbf{x}') \le f_{\alpha'}(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x}$. Но $d(\mathbf{x}') =$ $= f_{\alpha'}(\mathbf{x}') = 0$, т. е. $f_{\alpha'}(\mathbf{x}) \ge 0$ для всех $\mathbf{x}$. Однако по условию теоремы $\exists p_{\alpha'}$: $f_{\alpha'}(p_{\alpha'}) < 0$. При $\mathbf{x} = p_{\alpha'}$ имеем противоречие. Таким образом, и в этом случае справедливо (3.4), т. е. $\mathbf{y}' \in \varphi(\mathbf{x}')$.

Теорема полностью доказана.

Следствие. *Последовательность* $\{\mathbf{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$, *порождаемая рекуррентно включением* $\mathbf{x}_{k+1} \in \varphi(\mathbf{x}_k)$ *при произвольном начальном* $\mathbf{x}_0$, *сходится к некоторому решению системы* (3.1) (см. лемму 1.5).

Рассмотрим систему (3.1) с дополнительным требованием $\mathbf{x} \in S$, т. е.

$$f_\alpha(\mathbf{x}) \le 0, \qquad \forall \alpha \in N, \qquad \mathbf{x} \in S, \tag{3.5}$$

здесь S — выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$.

Напишем обобщение отображения (3.2):

$$\psi(\mathbf{x}) := \mathbf{Pr}_S(\varphi(\mathbf{x})). \tag{3.6}$$

Справедлива

Теорема 3.2. *Пусть система* (3.5) *совместна и выполнены условия теоремы* 3.1. *Тогда последовательность* $\{\mathbf{x}_k\}$, *порождаемая соотношением* $\mathbf{x}_{k+1} \in \psi(\mathbf{x}_k)$ *при произвольном начальном* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, *сходится к решению системы* (3.5).

Теорема следует из того, что, поскольку отображение $\varphi(\cdot)$ замкнуто, а операция проектирования $\mathbf{Pr}_S(\cdot)$ непрерывна, то их суперпозиция $\mathbf{Pr}_S(\varphi(\cdot))$ $(= \bigcup\limits_{\mathbf{y}\in\varphi(\cdot)} \mathbf{Pr}_S(\mathbf{y}))$ реализует замкнутое отображение.

4. Случай системы, объединяющей конечное число подсистем типа W

Предложенный метод решения системы неравенств (3.1) может быть модернизирован для нахождения решения систем неравенств вида

$$f_j(\mathbf{x},\mathbf{v}_j) \le 0, \qquad \forall \mathbf{v}_j \in V_j, \qquad \mathbf{x} \in S_j \subset \mathbb{R}^n, \qquad j = 1,\dots,m; \tag{4.1}$$

здесь $\{f_j(\mathbf{x},\mathbf{v}_j)\}$ — функции, удовлетворяющие условиям 1–4 из предыдущего параграфа с заменой в них α на $\mathbf{v}_j$; S_j — выпуклые замкнутые множества.

Модернизируем итерационный процесс так, чтобы получить решение системы (4.1). Введем функции невязки для (4.1):

$$d_j(\mathbf{x}) := \max_{\mathbf{v}_j \in V_j} f_j^+(\mathbf{x},\mathbf{v}_j) = f_j^+(\mathbf{x},\mathbf{v}_j(\mathbf{x})).$$

Сформируем отображения $\psi_j(\mathbf{x})$, $j = 1,\dots,m$, по аналогии с (3.6), т. е.

$$\psi_j(\mathbf{x}) := \mathbf{Pr}_{S_j}(\varphi_j(\mathbf{x})),$$

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x} \text{ при } d_j(\mathbf{x}) = 0; \\ \{\mathbf{x} - \lambda_j \frac{d_j(\mathbf{x})}{\|h_j\|^2} h_j \,|\, h_j \in \partial_{\mathbf{x}} f_j(\mathbf{x},\mathbf{v}_j(\mathbf{x})),\ \mathbf{v}_j(\mathbf{x}) \in J_j(\mathbf{x})\} \text{ при } d_j(\mathbf{x}) > 0. \end{cases}$$

Здесь $\lambda_j \in (0,2)$, $j = 1,\dots,m$; $J_j(\mathbf{x}) := \{\mathbf{v}_j(\mathbf{x}) | d_j(\mathbf{x}) = f_j(\mathbf{x},\mathbf{v}_j(\mathbf{x}))\}$.

Подсистема, отвечающая индексу j в системе (4.1), — это подсистема типа (3.5), поэтому для нее будет справедлива теорема 3.2 (естественно, в предположениях теоремы 3.1), а именно: последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$, заданная рекуррентно итерационным отображением $\varphi_j(\mathbf{x})$ при произвольном начальном

$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, будет сходиться к $\mathbf{x}' \in S_j \cap M_j$, где $M_j := \{\mathbf{x} | f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}_j) \leq 0,\ \forall \mathbf{v}_j \in V_j\}$. Отсюда, с использованием свойства $\varphi_j(\cdot) \in \overline{\mathbf{F}}_{M_j}$, $j = 1, \ldots, m$, и теоремы 1.1, п. 1, основываясь на лемме 1.5, получаем следующее утверждение.

Теорема 4.1. *При сделанных относительно системы* (4.1) *предположениях последовательность* $\{\mathbf{x}_k\}_0^{+\infty}$, *рекуррентно генерируемая включением*

$$\mathbf{x}_{k+1} \in \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i(\mathbf{x}_k), \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \qquad \alpha_i > 0, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

при произвольном начальном $\mathbf{x}_0$, *сходится к решению системы* (4.1).

5. Применение к решению вогнуто-выпуклых игр

Рассмотрим игру Γ двух лиц с нулевой суммой, определяемой множествами стратегий $\mathbf{x} \in M$ и $\mathbf{y} \in N$ 1-го и 2-го игроков соответственно и платежной функцией $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ [6].

Функция $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ интерпретируется как выигрыш 1-го игрока (проигрыш 2-го игрока). Принцип гарантированного результата, примененный к рассматриваемой игре, приводит к задачам поиска

$$\max_{\mathbf{x} \in M} \min_{\mathbf{y} \in N} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =: v$$

и

$$\min_{\mathbf{y} \in N} \max_{\mathbf{x} \in M} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =: v^*.$$

Если $\bar{t} := v = v^* = F(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$, $\overline{\mathbf{x}} \in M$, $\overline{\mathbf{y}} \in N$, то общее значение v и v^*, т. е. $\bar{t}$, называется ценой игры, $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}$ — оптимальными стратегиями игроков, $\{\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}, \bar{t}\}$ — *решением игры.*

Как известно, решение игры Γ сводится к решению континуальной системы выпуклых неравенств [см., например, 6]:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \geq t,\ \forall \mathbf{v} \in N,\ \mathbf{x} \in M; \quad F(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \leq t,\ \forall \mathbf{w} \in M,\ \mathbf{y} \in N. \tag{5.1}$$

Связь между игрой Γ и системой (5.1) такова: $\overline{\mathbf{z}} = [\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}, \bar{t}]$ — *решение игры* Γ *тогда и только тогда, когда* $\overline{\mathbf{z}}$ – *решение системы* (5.1).

В системе (5.1) сделаем переобозначения:

$$F_{\mathbf{v}}^{(1)}(\mathbf{x}, t) := -F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + t, \qquad F_{\mathbf{w}}^{(2)}(\mathbf{y}, t) := F(\mathbf{w}, \mathbf{y}) - t.$$

Тогда система (5.1) запишется в виде

$$F^{(1)}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t) \le 0, \quad \forall \mathbf{v} \in N, \quad \mathbf{x} \in M; \quad F^{(2)}_{\mathbf{w}}(\mathbf{y},t) \le 0, \quad \forall \mathbf{w} \in M, \quad \mathbf{y} \in N. \qquad (5.2)$$

Прежде чем построить для множества решений $\widetilde{M}$ системы (5.2) отображение $\widetilde{\varphi}(\cdot) \in \overline{F}_{\widetilde{M}}$, рассмотрим более общую конструкцию формирования фейеровского отображения по системе частичных фейеровских отображений $\{\varphi_i(\cdot)\}$ с несовпадающими пространствами их образов, а именно, пусть задана совокупность M_i-фейеровских отображений $\{\varphi_i(\mathbf{x}_i,\mathbf{y})\}_1^m$, где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$, $\varphi_i : Z_i \to 2^{Z_i}$, $Z_i := \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^s$, $M_i \subset Z_i$, $i = 1,\dots,m$.

Точку $\widetilde{z} = [\widetilde{\mathbf{x}}_1,\dots,\widetilde{\mathbf{x}}_m;\widetilde{\mathbf{y}}] \in Z := \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_m} \times \mathbb{R}^s$ назовем *неподвижной точкой* для $\{\varphi_i\}_1^m$, если $\forall i: \ \varphi_i(\widetilde{\mathbf{x}}_i,\widetilde{\mathbf{y}}) = [\widetilde{\mathbf{x}}_i,\widetilde{\mathbf{y}}]$. Множество неподвижных точек обозначим $\widetilde{M}$. Будем предполагать, что $\widetilde{M} \neq \emptyset$.

Пусть $z_i \in \varphi_i(\mathbf{x}_i,\mathbf{y})$ и

$$z_i = [\overline{\mathbf{x}}_i, \overline{\mathbf{y}}_i], \quad i = 1,\dots,m, \qquad (5.3)$$

где $\overline{\mathbf{x}}_i$ — след (алгебраическая проекция) элемента z_i в подпространстве $\mathbb{R}^{n_i}$ пространства Z_i; $\overline{\mathbf{y}}_i$ — след элемента z_i в $\mathbb{R}^s \subset Z_i$.

Положим $z = [\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_m;\mathbf{y}] \in Z$. Построим отображение

$$\varphi(z) := \{[\overline{\mathbf{x}}_1,\dots,\overline{\mathbf{x}}_m; \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \overline{\mathbf{y}}_i] \mid (5.3),\ z_i \in \varphi_i(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}), \quad i = 1,\dots,m\},$$

где $\{\overline{\mathbf{x}}_1,\dots,\overline{\mathbf{x}}_m;\overline{\mathbf{y}}_1,\dots,\overline{\mathbf{y}}_m\}$ идентифицируются соотношением (5.3).

Теорема 5.1. *Если $\varphi_i(\cdot) \in \overline{F}_{M_i}$, то $\varphi(\cdot) \in \overline{F}_{\widetilde{M}}$. Любая последовательность $\{z^k\} \subset Z$, порожденная рекуррентно отображением $\varphi(z)$, т. е. $z^{k+1} \in \varphi(z^k)$ при произвольном z_0, сходится к точке $\widetilde{z}$ из $\widetilde{M}$.*

Доказательство. Свойство $\widetilde{z} \in \widetilde{M} \Rightarrow \varphi(\widetilde{z}) = \widetilde{z}$ очевидно. Нужно доказать

$$\{\overline{z} \in \varphi(z),\ z \notin \widetilde{M},\ \widetilde{z} \in \widetilde{M}\} \Rightarrow \|\overline{z} - \widetilde{z}\| < \|z - \widetilde{z}\|. \qquad (5.4)$$

Имеем $\overline{z} = [\overline{\mathbf{x}}_1,\dots,\overline{\mathbf{x}}_m; \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \overline{\mathbf{y}}_i]$, где $\overline{\mathbf{x}}_i$ — след точки $z_i \in \varphi_i(\mathbf{x}_i,\mathbf{y})$ в $\mathbb{R}^{n_i}$; $\overline{\mathbf{y}}_i$ — след z_i в $\mathbb{R}^s$; $\widetilde{z} = [\widetilde{\mathbf{x}}_1,\dots,\widetilde{\mathbf{x}}_m;\widetilde{\mathbf{y}}]$, при этом $\forall i : \varphi_i(\widetilde{\mathbf{x}}_i,\widetilde{\mathbf{y}}) = [\widetilde{\mathbf{x}}_i,\widetilde{\mathbf{y}}]$. Так как $\widetilde{z} \in \widetilde{M}$, то по крайней мере для одного i выполняется строгое неравенство

$$\|[\overline{\mathbf{x}}_i,\overline{\mathbf{y}}_i] - [\widetilde{\mathbf{x}}_i,\widetilde{\mathbf{y}}]\|^2 < \|[\mathbf{x}_i,\mathbf{y}] - [\widetilde{\mathbf{x}}_i,\widetilde{\mathbf{y}}]\|^2. \qquad (5.5)$$

Перейдем к доказательству соотношения (5.4):

$$\|\overline{z}-\widetilde{z}\|^2 = \|[\overline{\mathbf{x}}_1,\dots,\overline{\mathbf{x}}_m;\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \overline{\mathbf{y}}_i] - [\widetilde{\mathbf{x}}_1,\dots,\widetilde{\mathbf{x}}_m;\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \widetilde{y}]\|^2 =$$

$$= \|[\overline{\mathbf{x}}_1-\widetilde{\mathbf{x}}_1,\dots,\overline{\mathbf{x}}_m-\widetilde{\mathbf{x}}_m;\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m(\overline{\mathbf{y}}_i-\widetilde{\mathbf{y}})]\|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^m \|\overline{\mathbf{x}}_i-\widetilde{\mathbf{x}}_i\|^2 + \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^m \|\overline{\mathbf{y}}_i-\widetilde{\mathbf{y}}\|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^m(\|\overline{\mathbf{x}}_i-\widetilde{\mathbf{x}}_i\|^2+\|\overline{\mathbf{y}}_i-\widetilde{\mathbf{y}}\|^2) - \frac{m^2-1}{m^2}\sum_{i=1}^m \|\overline{\mathbf{y}}_i-\widetilde{\mathbf{y}}\|^2 \le$$

$$\le \sum_{i=1}^m(\|\overline{\mathbf{x}}_i-\widetilde{\mathbf{x}}_i\|^2+\|\overline{\mathbf{y}}_i-\widetilde{\mathbf{y}}\|^2) < \sum_{i=1}^m \|[\mathbf{x}_i,\mathbf{y}]-[\widetilde{\mathbf{x}}_i,\widetilde{\mathbf{y}}]\|^2 = \|z-\widetilde{z}\|^2,$$

что и требовалось. Тем самым доказано включение $\varphi(\cdot)\in\overline{F}_{\widetilde{M}}$. Так как из замкнутости отображений $\{\varphi_i(\cdot)\}$ замкнутость φ следует очевидным образом, то включение $\varphi(\cdot)\in\overline{F}_{\widetilde{M}}$ также доказано.

Вернемся к системе (5.2). Как уже было сказано, решение игры Γ сводится к решению этой системы. Перепишем ее в виде

$$\begin{cases} F^{(1)}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t)\le 0, \quad \mathbf{x}\in M, \quad \forall\mathbf{v}\in N; & (5.6)_1\\ F^{(2)}_{\mathbf{w}}(\mathbf{y},t)\le 0, \quad \mathbf{y}\in N, \quad \forall\mathbf{w}\in M. & (5.6)_2\end{cases}$$

Выделим также подсистемы

$$F^{(1)}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t)\le 0, \quad \forall\mathbf{v}\in N; \qquad (5.6)^0_1$$

$$F^{(2)}_{\mathbf{w}}(\mathbf{y},t)\le 0, \quad \forall\mathbf{w}\in M. \qquad (5.6)^0_2$$

Это подсистемы $(5.6)_1$ и $(5.6)_2$, только без требований $\mathbf{x}\in M$ и $\mathbf{y}\in N$.

Для подсистем $(5.6)^0_1$ и $(5.6)^0_2$ введем невязки $d_1(\mathbf{x},t)$ и $d_2(\mathbf{y},t)$:

$$d_1(\mathbf{x},t) = \max_{\mathbf{v}\in N}[F^{(1)}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t)]^+ \ (=[F^{(1)}_{\mathbf{v}(\mathbf{x},t)}(\mathbf{x},t)]^+), \qquad (5.7)$$

$$d_2(\mathbf{y},t) = \max_{\mathbf{w}\in M}[F^{(2)}_{\mathbf{w}}(\mathbf{y},t)]^+ \ (=[F^{(2)}_{\mathbf{w}(\mathbf{y},t)}(\mathbf{y},t)]^+). \qquad (5.8)$$

Обозначим:

$$J_1(\mathbf{x},t) = \{\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\,|\,(5.7)\}, \quad J_2(\mathbf{y},t) = \{\mathbf{w}(\mathbf{y},t)\,|\,(5.8)\}.$$

Положим

$$\varphi_1(\mathbf{x},t) := \{[\mathbf{x},t] - \lambda_1 \frac{d_1(\mathbf{x},t)}{\|h_{\mathbf{v}}^{(1)}\|^2+1}[-h_{\mathbf{v}}^{(1)},1] \mid \mathbf{v} \in J_1(\mathbf{x},t),\ h_{\mathbf{v}}^{(1)} \in \partial_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x},\mathbf{v})\}, \tag{5.9}$$

$$\varphi_2(\mathbf{y},t) := \{[\mathbf{y},t] - \lambda_2 \frac{d_2(\mathbf{y},t)}{\|h_{\mathbf{w}}^{(2)}\|^2+1}[h_{\mathbf{w}}^{(2)},-1] \mid \mathbf{w} \in J_2(\mathbf{y},t),\ h_{\mathbf{w}}^{(2)} \in \partial_{\mathbf{y}} F(\mathbf{w},\mathbf{y})\}; \tag{5.10}$$

здесь $\lambda_1 \in (0,2)$, $\lambda_2 \in (0,2)$. Обозначим через $\alpha_{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t)$ и $\beta_{\mathbf{w}}(\mathbf{y},t)$ коэффициенты перед $[-h_{\mathbf{v}}^{(1)},1]$ и $[h_{\mathbf{w}}^{(2)},-1]$. Тогда $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ могут быть переписаны в виде

$$\varphi_1(\mathbf{x},t) = \{[\underbrace{\mathbf{x}+\alpha_{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t)h_{\mathbf{v}}^{(1)}}_{\overline{\mathbf{x}}},\ \underbrace{t-\alpha_{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t)}_{t'}] \mid \mathbf{v} \in J_1(\mathbf{x},t),\ h_{\mathbf{v}}^{(1)} \in \partial_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x},\mathbf{v})\}, \tag{5.11}$$

$$\varphi_2(\mathbf{y},t) = \{[\underbrace{\mathbf{y}+\beta_{\mathbf{w}}(\mathbf{y},t)h_{\mathbf{w}}^{(2)}}_{\overline{\mathbf{y}}},\ \underbrace{t+\beta_{\mathbf{w}}(\mathbf{y},t)}_{t''}] \mid \mathbf{w} \in J_2(\mathbf{y},t),\ h_{\mathbf{w}}^{(2)} \in \partial_{\mathbf{y}} F(\mathbf{w},\mathbf{y})\}. \tag{5.12}$$

Определим целевое отображение

$$\widetilde{\varphi}(\mathbf{x},\mathbf{y},t) := \{[\mathbf{Pr}_M(\overline{\mathbf{x}}), \mathbf{Pr}_N(\overline{y}), \frac{t'+t''}{2}]\}, \tag{5.13}$$

где $\overline{\mathbf{x}}$ — первый векторный фрагмент в (5.11); $\overline{\mathbf{y}}$ — первый векторный фрагмент в (5.12); t', t'' — скалярные фрагменты в (5.11) и (5.12) соответственно.

Сведем воедино все ограничения на игру Γ, которые дают сходимость итерационного процесса, порождаемого отображением $\widetilde{\varphi}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$, к решению игры:

$\mathbf{1^0}$. M и N — выпуклые компакты, $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}$;

$\mathbf{2^0}$. $F(\mathbf{x},\mathbf{y})$ — непрерывная по $z = [\mathbf{x},\mathbf{y}] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ функция, вогнутая по $\mathbf{x}$ и выпуклая по $\mathbf{y}$;

$\mathbf{3^0}$. Отображения $[\mathbf{x},\mathbf{y}] \to \partial_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x},\mathbf{y})$, $[\mathbf{x},\mathbf{y}] \to \partial_{\mathbf{y}} F(\mathbf{x},\mathbf{y})$ замкнуты.

Теорема 5.2. *При сделанных выше предположениях* 1^0–3^0

$$\widetilde{\varphi}(\mathbf{x},\mathbf{y},t) \in \overline{F}_{\widetilde{M}},$$

где $\widetilde{M}$ *— множество векторов-троек* $[\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},t] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, *являющихся решениями игры* Γ. *Отсюда следует, что любая последовательность* $\{z^k\}_0^{+\infty}$, *порождаемая (при произвольном начальном* $z^0 = [\mathbf{x}^0,\mathbf{y}^0,t]$*) рекуррентным соотношением* $z^{k+1} \in \widetilde{\varphi}(z_k)$, *сходится к решению игры* Γ.

Обоснование сформулированного утверждения, по существу, подготовленное предыдущими теоремами, разобьем на ряд пунктов.

1. Разрешимость игры Γ обеспечивается условиями 1^0 и 2^0 (это известный результат — см., например, [6]).

2. Отображения $\varphi_1(\mathbf{x},t)$ и $\varphi_2(\mathbf{y},t)$, т. е. (5.9) и (5.10), соответствующие системам $(5.6)_1^0$ и $(5.6)_2^0$, построены точно так же, как отображение (3.2) для системы (3.1) (разница лишь в обозначениях). Замкнутость отображения (3.2) обеспечивалась условиями 1–4 (теорема 3.1). Применительно к системам $(5.6)_1^0$ и $(5.6)_2^0$ эти условия выполняются, в силу предположений $1^0 - 3^0$.

Пояснений требует лишь условие 4, которое, например, для системы $(5.6)_1^0$ запишется так: $\forall\mathbf{v}\in N\ \exists[\overline{\mathbf{x}},\overline{t}] : F_{\overline{\mathbf{v}}}^{(1)}(\overline{\mathbf{x}},\overline{t}) < 0$, т. е. $-F(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{v}})+\overline{t} < 0$. Очевидно, для любых $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{v}}$ соответствующие $\overline{t}$ выбираются тривиально. Точно так же дело обстоит и с системой $(5.6)_2^0$. Сказанное позволяет утверждать (в силу теоремы 3.1), что отображения $\varphi_1(\mathbf{x},t)$ и $\varphi_2(\mathbf{y},t)$ замкнуты.

3. Итак, нами показано, что

$$\varphi_1(\cdot)\in\overline{F}_{Fix\varphi_1(\cdot)},\quad \varphi_2(\cdot)\in\overline{F}_{Fix\varphi_2(\cdot)},$$

где $Fix\varphi_i(\cdot)$ — символ для обозначения множеств неподвижных точек отображений $\varphi_i(\cdot)$, коими являются множества решений систем $(5.6)_1^0$ и $(5.6)_2^0$. Исходя из $\varphi_1(\mathbf{x},t)$ и $\varphi_2(\mathbf{y},t)$, можно построить отображение $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ согласно схеме конструирования отображения $\varphi(z)$ из теоремы 5.1, которое в нашем случае будет иметь вид $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=\{[\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\frac{t'+t''}{2}]\}$, где $\overline{\mathbf{x}}$ — след вектора $z_1\in\varphi_1(\mathbf{x},t)$ в $\mathbb{R}^n$ как в подпространстве пространства $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$; $\overline{\mathbf{y}}$ — след вектора $z_2\in\varphi_2(\mathbf{y},t)$ в $\mathbb{R}^m$ как в подпространстве пространства $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$, а t' и t'' — следы z_1 и z_2 в одномерном подпространстве $\mathbb{R}$ пространств $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$.

Таким образом, отображение $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ будет замкнутым и фейеровским относительно множества решений системы

$$F_{\mathbf{v}}^{(1)}(\mathbf{x},t)\le 0,\ \forall\mathbf{v}\in N;\quad F_{\mathbf{w}}^{(2)}(\mathbf{y},t)\le 0,\ \forall\mathbf{w}\in M, \tag{5.14}$$

это объединение систем $(5.6)_1^0$ и $(5.6)_2^0$.

Что касается требований $\mathbf{x}\in M$ и $\mathbf{y}\in N$, то они учитываются путем использования операторов метрического проектирования на M и N, как это отражено в (5.13).

Вектор $[\mathbf{Pr}_M(\overline{\mathbf{x}}),\mathbf{Pr}_N(\overline{\mathbf{y}}),\frac{t'+t''}{2}]$ из (5.13) реализует проекцию вектора $[\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\frac{t'+t''}{2}]\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$ на $M\times N\times\mathbb{R}$, а отображение $\widetilde{\varphi}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ реализует всю совокупность проекций векторов из $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ на отмеченное множество. Поскольку отображение $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$, как было показано, является фейеровским относительно множества решений системы (5.14), а оператор проектирования является непрерывным и фейеровским относительно множества, на которое осуществляется проектирование (лемма 1.4), то их суперпозиция $\widetilde{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ является замкнутым и фейеровским отображением относительно множества $Fix\widetilde{\varphi}(\cdot)$ (теорема 1.1, п. 2). С учетом леммы 1.5 отсюда и следует справедливость теоремы 5.2.

Автор благодарит профессора И. И. Еремина за предложенную тему, научное руководство и помощь при написании данной статьи.

Литература

1. Motzkin T. S., Schoenberg J. J. The relaxation method for linear inequalities // Canad. J. Math. 1954. Vol. 6, № 3. P. 393–404.
2. Agmon S. The relaxation method for linear inequalities // Ibid. P. 382–392.
3. Еремин И. И., Мазуров В. Д. Нестационарные процессы математического программирования. М.: Наука, 1979.
4. Тарасова Т. А. Об одном итерационном методе решения бесконечных систем выпуклых неравенств // Методы фейеровского типа в выпуклом программировании. Свердловск: УрО АН СССР, 1975. С. 58–61.
5. Еремин И. И. Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во «Екатеринбург», 1999.
6. Бесконечные антагонистические игры: Сб. статей / Под ред. Н. Н. Воробьева. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963.

Статья поступила 25.01.2001 г.